Problema 1:

Determine el complemento del dominio de la función f definida por la relación

$$f_{(x)} = \frac{1}{\cos^2(\pi x) - 1} + \frac{\pi}{\cos(\pi x)}; n \in \mathbb{Z}$$

A) $\{n\}$ B) $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ C) $\{2n\}$

D) $\left\{\frac{n}{3}\right\}$ E) $\left\{\frac{n}{4}\right\}$

Resolución:

Nos piden: $(Df)'$

Datos: $f(x) = \frac{1}{\cos^2(\pi x) - 1} + \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$

Restricciones:

- $\cos^2(\pi x) - 1 \neq 0 \rightarrow \mathbf{sen^2(\pi x)} \neq 0 : \pi x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \ldots\ldots (1)$
- $\cos(\pi x) \neq 0 : \pi x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2} \ldots\ldots (2)$

De (1) y (2):

$$\pi x \neq \frac{n\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{n}{2}$$

Luego:

$$Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{n}{2}\right\}$$

$$\therefore (Df)' = \left\{\frac{n}{2}\right\}$$

CLAVE: B

Problema 2:

Determine el rango de la función f definida por

$$f_{(x)} = \left(\frac{\operatorname{sen}2x - \cos 2x}{\operatorname{sen}x - \cos x}\right)\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

A) $[-1;1] - \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

B) $\langle -1;1\rangle$

C) $[-1;1] - \{0\}$

D) $[-1;1]$

E) $\langle -1;1\rangle - \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Resolución:

Nos piden: Rf

Datos:

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}2x - \cos 2x}{\operatorname{sen}x - \cos x}\right)\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$$

Restricciones:

- $\operatorname{sen}x - \cos x \neq 0 \rightarrow \tan x \neq 1 : x \neq n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \ldots\ldots (1)$

En f(x):

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}2x - \cos 2x}{\operatorname{sen}x - \cos x}\right)[\frac{\sqrt{2}}{2}(senx - cosx)]$$

$$f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = sen(2x - \frac{\pi}{4})$$

Como: $x \neq n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

Donde: $-1 \leq \underbrace{sen(2x - \frac{\pi}{4})}_{f(x)} \leq 1$

$\therefore Rf = [-1;1]$

CLAVE: D

Problema 3:

Sea la función f definida mediante la regla de correspondencia

$$f_{(\cos x)} = \cos 2x - 4\cos x + 5;\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

Calcule el rango de $f_{(x)}$.

A) $\left[1; \frac{3}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 2; \frac{5}{2}\right\rangle$ C) $\left[2; \frac{5}{2}\right]$

D) $\left[0; \frac{3}{2}\right\rangle$ E) $\left[2; \frac{5}{2}\right\rangle$

Resolución:

Nos piden: Rf

Datos:

$$f(\cos x) = \cos 2x - 4\cos x + 5, x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

En f(x):

$$f(\cos x) = 2\cos^2 x - 1 - 4\cos x + 5$$

$$f(\cos x) = 2(\cos^2 x - 2\cos x + 1) + 2$$

$$f(\cos x) = 2(\cos x - 1)^2 + 2$$

Como: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\rangle \rightarrow \frac{1}{2} < cosx \leq 1$

Construyendo f(cosx):

$$\rightarrow \frac{1}{2} < cosx \leq 1 \rightarrow 2 \leq \underbrace{2(\cos x - 1)^2 + 2}_{f(cosx)} < \frac{5}{2}$$

$$\therefore Rf = \left[2; \frac{5}{2}\right[$$

CLAVE: E

Problema 4:

Determine los puntos de discontinuidad de la función

$$f_{(x)} = \frac{\csc(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\cos\frac{x}{2}\right)\right]}$$

A) $\{2n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$

B) $\left\{\frac{n\pi}{4}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

C) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

D) $\{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$

E) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

Resolución:

Nos piden: puntos de discontinuidad de f

Dato:

$$f(x) = \frac{\csc(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\cos\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Para que f(x), no se defina , se debe cumplir:

- $\nexists \csc(sen x) : sen x = 0 \rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \ldots\ldots (1)$

v

- $\operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\cos\frac{x}{2}\right)\right] = 0 : \pi cos\frac{x}{2} = n\pi \rightarrow cos\frac{x}{2} = n, n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow cos\frac{x}{2} = -1; 0; 1 : \frac{x}{2} = \frac{n\pi}{2} \rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.....(2)

De (1) y (2):

$x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ Los puntos de discontinuidad de f, son de la forma: $\{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$

CLAVE: D

Problema 5:

Determine el dominio de la función f, definida por

$$f_{(x)}=\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\frac{1}{2}};\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$$

A) $\left[n\pi-\frac{\pi}{12};n\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$

B) $\left[n\pi+\frac{\pi}{12};n\pi+\frac{7\pi}{12}\right]$

C) $\left[n\pi-\frac{\pi}{6};n\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$

D) $\left[n\pi-\frac{\pi}{12};n\pi+\frac{7\pi}{12}\right]$

E) $\left[n\pi+\frac{\pi}{12};n\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$

Resolución:

Nos piden: Df

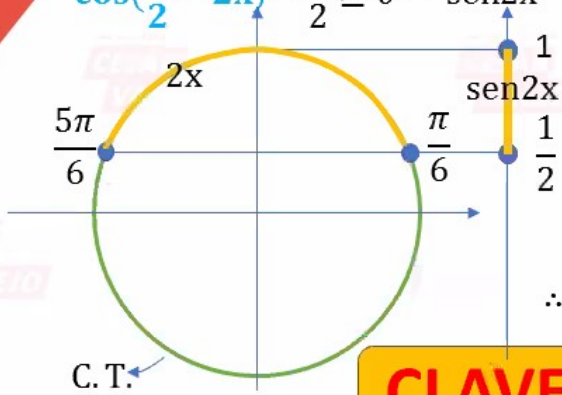
Datos:

$$f(x)=\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\frac{1}{2}}$$

Restricción: $(n\in\mathbb{Z})$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\frac{1}{2}\geq 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\frac{1}{2}\geq 0\rightarrow \text{sen}2x-\frac{1}{2}\geq 0\rightarrow \text{sen}2x\geq\frac{1}{2}$$



Del gráfico:

$$2n\pi+\frac{\pi}{6}\leq 2x\leq 2n\pi+\frac{5\pi}{6}$$

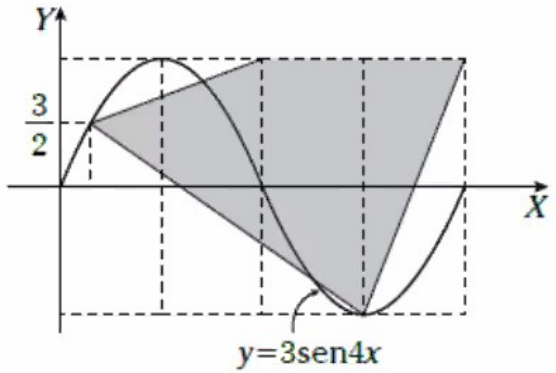
$$n\pi+\frac{\pi}{12}\leq x\leq n\pi+\frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore \text{Df}=\left[n\pi+\frac{\pi}{12};n\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$$

CLAVE: E

Problema 6:

A partir del gráfico, calcule el área de la región sombreada.



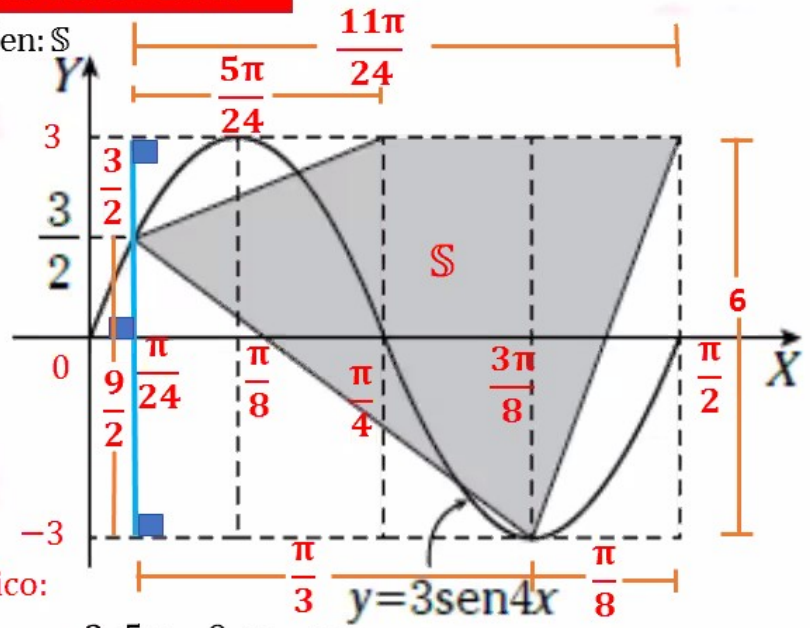
A) $\frac{27\pi}{32}$ B) $\frac{9\pi}{32}$ C) $\frac{39\pi}{32}$

D) $\frac{\pi}{32}$ E) $\frac{47\pi}{32}$

Resolución:

Nos piden: $\mathbb{S}$

Dato:



Del gráfico:

$$\mathbb{S} = \frac{11\pi}{24}.6 - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5\pi}{24}}{2} - \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{2} - \frac{\frac{\pi}{8}.6}{2}$$

$$\therefore \mathbb{S} = \frac{47\pi}{32}.$$

CLAVE: E

Grabando

CICLO REPASO UNI

Problema 7:

Calcule el rango de la función f, si

$$f_{(x)} = \frac{\cos^4 x + 2 - \cos 2x}{\text{sen}^4 x - 1}$$

A) $\langle -\infty; -1]$ B) $\langle -\infty; 0]$ C) $\langle -\infty; -2]$
D) $\langle -\infty; 1]$ E) $\langle -\infty; 2]$

Resolución:

Nos piden: Rf

Dato:

$$f(x) = \frac{\cos^4 x + 2 - \cos 2x}{\text{sen}^4 x - 1}$$

Restricción:

$$\text{sen}^4 x - 1 \neq 0 \rightarrow \text{sen}^4 x \neq 1$$

En f(x):

$$f(x) = \frac{\cos^4 x + 2 - (cos^4 x - sen^4 x)}{\text{sen}^4 x - 1} = \frac{2 + sen^4 x}{sen^4 x - 1}$$

$$f(x) = \frac{3}{sen^4 x - 1} + 1$$

Como: $0 \leq sen^4 x < 1 \rightarrow -1 \leq sen^4 x - 1 < 0$

$$\rightarrow \frac{1}{sen^4 x - 1} \leq -1 \rightarrow \underbrace{\frac{3}{sen^4 x - 1} + 1}_{f(x)} \leq -2$$

$\therefore \text{Rf} =]-\infty; -2]$

CLAVE: C

Problema 8:

Calcule el menor valor entero de la expresión

$$\frac{|\operatorname{sen} x - \cos x| + 1}{|\operatorname{sen} x + \cos x| - 1}$$

si, $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

A) 3 B) 1 C) 0
D) −2 E) −1

Resolución:

Nos piden: menor valor entero de f(x)

Dato:

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen}x - \cos x| + 1}{|\operatorname{sen}x + \cos x| - 1}, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

- Si $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \rightarrow 0 < \operatorname{sen}x < \cos x$

En f(x):

$$f(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen}x + 1}{\operatorname{sen}x + \cos x - 1} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \frac{2\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2})}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2})} = \cot\frac{x}{2}$$

Como: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \rightarrow \frac{x}{2} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{8} \right\rangle : \cot\frac{x}{2} \geq \sqrt{2} + 1$ ..... (1)

$f(x) \geq \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}41$

∴ Menor valor entero de f(x) es: 3

CLAVE: A

Problema 9:

Si $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ calcule el máximo valor de

$$f_{(x)} = \sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x} - \sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[4]{2}$ C) 1

D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

Resolución:

Nos piden: fmáx

Dato:

$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}x + \cos x} - \sqrt{\operatorname{sen}x - \cos x}\,, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Restricción:

$\operatorname{sen}x - \cos x \ge 0 \rightarrow \operatorname{sen}x \ge \cos x$: $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$

En f(x):

$f(x) = \underbrace{\sqrt{\operatorname{sen}x + \cos x}}_{\text{Decreciente}} + \underbrace{(-\sqrt{\operatorname{sen}x - \cos x})}_{\text{Decreciente}}$

Función decreciente

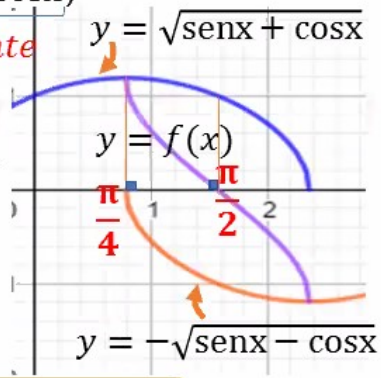
Como: $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$ y f: *func. decrec.*

$\rightarrow f(\frac{\pi}{2}) \le f(x) \le f(\frac{\pi}{4})$

Luego:

$\text{fmáx} = f(\frac{\pi}{4})$

$\therefore \text{fmáx} = \sqrt[4]{2}$



CLAVE: B

Grabando

CICLO REPASO UNI

Problema 10:

Calcule el rango de la función f, definida por

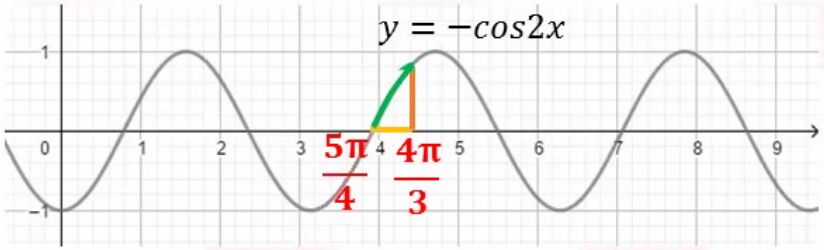
$$y = f_{(x)} = \frac{|\tan x - \cot x|}{|\sec x \csc x|}$$

Si, $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{4\pi}{3}$.

A) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ B) $\langle 0; 1 \rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

Observación:



Resolución:

Nos piden: Rf

Dato:

$$y = f(x) = \frac{|\tan x - \cot x|}{|\sec x \csc x|}, x \in \left\langle \frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$$

Como: $x \in \left\langle \frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle \rightarrow \tan x > \cot x$

En f(x):

$$f(x) = \frac{|\tan x - \cot x|}{|\tan x + \cot x|} = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{-2\cot 2x}{2\csc 2x} = -\cos 2x$$

Hallando la variación de f(x):

$x \in \left\langle \frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle \rightarrow$ f: es una función creciente

Donde:

$$\rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right) < f(x) < f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

$$\therefore Rf = \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$$

CLAVE: A

www.academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Problema 11:

Respecto a la función $f_{(x)}=\text{sen}x+2\cos x$, indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. Si $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow f$ es decreciente.

II. Si $x \in \left\langle -\frac{\pi}{8}; 0 \right\rangle \rightarrow f$ es creciente.

III. Si $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow f_{(x)} \in \langle 0; \sqrt{5}]$.

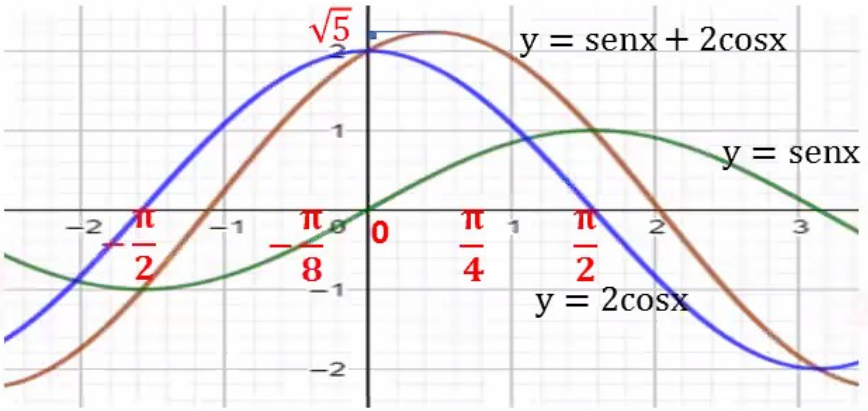
A) VVF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FVF

Resolución:

Nos piden: Analizar la verdad(V) o falsedad(F)

Dato:

$f(x) = \text{sen}x + 2\cos x$



Del gráfico:

∴ I. V II. V III. F

CLAVE: A

Problema 12:

Calcule el máximo valor de la función definida por

$$f_{(x)} = \frac{1+\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x};\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

A) $\frac{3\sqrt{3}-1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ E) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$

Resolución:

Nos piden: Máximo valor de la función

Dato:

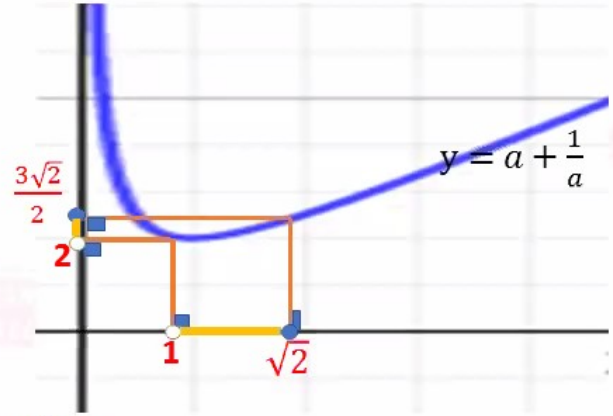
$$f(x) = \frac{1+\text{senxcosx}}{\text{senx}+\text{cosx}};\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Sea $\text{senx} + \text{cosx} = a \rightarrow \text{senxcosx} = \frac{a^2-1}{2}$

En f(x):

$$f(x) = \frac{1+\frac{a^2-1}{2}}{a} = \frac{a^2+1}{2a} = \frac{a+\frac{1}{a}}{2}$$

Como; $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow 1 < \text{senx} + \text{cosx} \leq \sqrt{2} \rightarrow 1 < a \leq \sqrt{2}$



Del gráfico:

- Si $1 < a \leq \sqrt{2} \rightarrow \quad 2 < a + \frac{1}{a} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \quad 1 < \underbrace{\frac{a+\frac{1}{a}}{2}}_{f(x)} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \text{fmáx} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

CLAVE: E

Grabando

CICLO REPASO UNI

Problema 13:

Halle el mínimo valor positivo de la función

$$f_{(x)} = \frac{15+\tan^2 x}{1+\tan x};\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

A) 12 B) 4 C) 6

D) 8 E) 10

Resolución:

Nos piden: Mínimo valor positivo de la función

Dato:

$$f(x) = \frac{15+\tan^2 x}{1+\tan x};\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$$

$Sea\ 1+tanx = a \rightarrow tanx = a-1$

En f(x):

$$f(x) = \frac{15+(a-1)^2}{a} = \frac{a^2-2a+16}{a} = a + \frac{16}{a} - 2$$

Como; $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow tanx \leq 1 \rightarrow tanx + 1 \leq 2 \rightarrow a \leq 2$

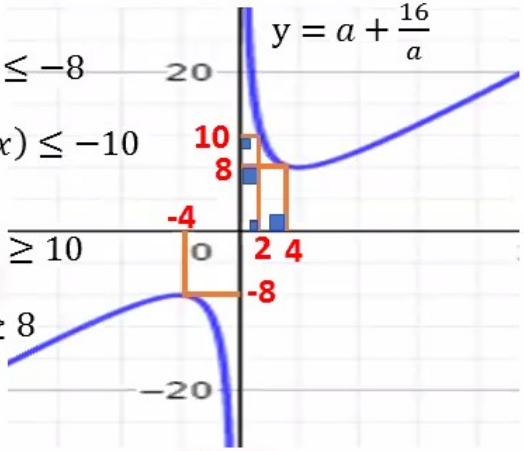
Del gráfico:

- $Si\ a < 0 \rightarrow a + \frac{16}{a} \leq -8$

$\rightarrow a + \frac{16}{a} - 2 \leq -10 : f(x) \leq -10$

- $Si\ 0 < a \leq 2 \rightarrow a + \frac{16}{a} \geq 10$

$\rightarrow a + \frac{16}{a} - 2 \geq 8 : f(x) \geq 8$



Luego:

$f(x) \leq -10 \ \vee \ f(x) \geq 8$

$\therefore$ El minimo valor positivo de la función es:8

CLAVE: D

www.academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Problema 14:

En el dominio de $\langle -2; 2\rangle$, calcule el número de puntos de corte que existen entre la gráfica de la función $f_{(x)} = 2 - \frac{1}{x} - 4|\cos\pi x|$ y el eje de abscisas.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

Resolución:

Nos piden: Número de puntos de corte de f (x) con el eje X

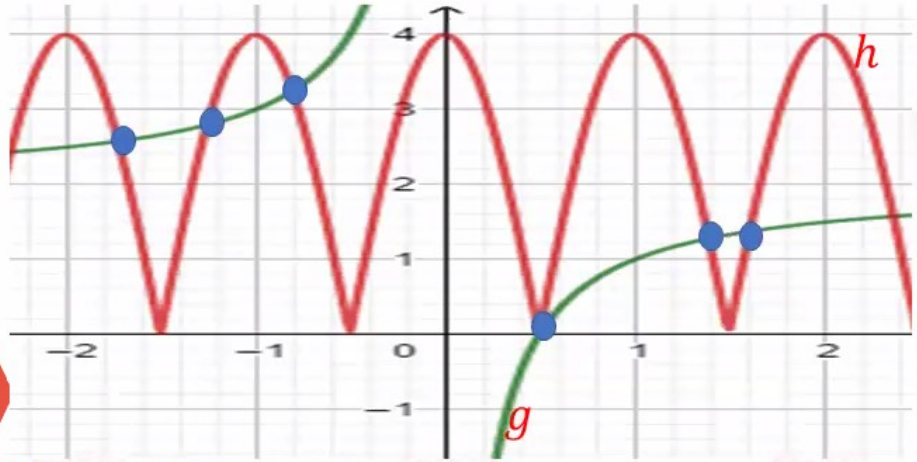
Dato:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - 4|\cos\pi x| \; ; \; x \in \langle -2; 2\rangle$$

Haciendo: $f(x) = 0$

$$2 - \frac{1}{x} - 4|\cos\pi x| = 0 \rightarrow 2 - \frac{1}{x} = 4|\cos\pi x|$$

Sea $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$ y $h(x) = 4|\cos\pi x|$



Observación:

El número de puntos de g y h equivale al número de puntos de corte de f con el eje X en $\langle -2; 2\rangle$.

Del gráfico:

→ Hay 6 puntos de corte entre g y h en $\langle -2; 2\rangle$

∴ Hay 6 puntos de corte de f con el eje X

CLAVE: C

Grabando

CICLO REPASO UNI

Problema 15:

Calcule el mayor valor de $x < 2\pi$, correspondiente al máximo valor de

$$N = \frac{3\cos^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen}^4 x + 2\cos^2 x}$$

A) $2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$

B) $2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$

C) $\frac{5\pi}{3}$

D) $\frac{11\pi}{6}$

E) $2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolución:

Nos piden: $x_{máx}$

Dato:

$$N = \frac{3\cos^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen}^4 x + 2\cos^2 x};\ x < 2\pi$$

De N:

$$N = \left(\frac{3\cos^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen}^4 x + 2\cos^2 x} - 1\right) + 1$$

$$N = \frac{3(\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x) + 4\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x}{3\operatorname{sen}^4 x + 2\cos^2 x} + 1$$

$$N = \frac{3\cos 2x + 2(1 - \cos 2x) - (1 + \cos 2x)}{3\operatorname{sen}^4 x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)} + 1$$

$$N = \frac{1}{3\operatorname{sen}^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x + 2} + 1 = \frac{1}{3\left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}}$$

Para que N, sea máximo, se debe cumplir: $sen^2 x - \frac{1}{3} = 0$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} : x = n\pi + (-1)^n \operatorname{arcsen}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

Como: $x < 2\pi$ y $x_{máx}$ $\therefore x = 2\pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

CLAVE: A

www.academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO